فصلنامه آموزش مهندسی ایران، شماره ۳۹، سال دهم، ص۳٦- ۱۹

بررسی اصول و مبانی مدلسازی ریاضی مسائل خوش طرح فیزیک و مهندسی

محمد جهانشاهی
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان، گروه ریاضی

چکیده: یکی از روشهای علمی حل مسائل فیزیک و مهندسی و تجزیه و تحلیل پدیده های طبیعی، ساخت و ارائه مدل ریاضی برای این مسائل و پدیده هاست. مدل ریاضی برای مسائل فیزیک و مهندسی در واقع، بیان واقعیتهای حاکم بر مسئله فیزیک و مهندسی در قالب روابط ریاضی، به خصوص بیان علایق و روابط میان مجهول و داده های مسئله با روابط و معادلات ریاضی است. غالباً مدل ریاضی مسائل فیزیک و مهندسی به صورت مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی که شامل یک معادله دیفرانسیل به همراه چند شرط اولیه یا شرط مرزی است، در می آید. در این مقاله ابتدا سه سؤل اساسی زیر در این خصوص مطرح شده است:

۱. آیا برای هر مسئله فیزیک و مهندسی می توان الگو و مدل ریاضی ساخت؟
۲. آیا هر مسئله و مدل ریاضی که از فیزیک و مهندسی به دست می آید قابل حل است؟
۳. آیا هر جواب و پیش بینی حاصل از مدل ریاضی در فیزک و مهندسی قابل استفاده است؟

در قسمتهای بعدی مقاله به سؤالات مطرح شده با اشاره به زمینه های تاریخی، علمی و فلسفی موضوع بر اساس دیدگاهها و عقاید دانشمندان و فیلسوفان یونان باستان و ریاضیدانان و فیزیکدانان دوران جدید و معاصر پاسخ داده شده است.
به دلیل اینکه فعالیتها و تلاشهای علمی و ریاضی فیزیکدانان و مهندسان در پاسخ به سؤالهای یاد شده مثبت باشد، ابتدا مسائل خوش طرح[1] بیان می شود و سپس با استفاده از روش عمومی ریاضیدانان، مسائل ناخوش طرح[2] مورد بررسی قرار می گیرد تا از این طریق شناختمان را در خصوص شرایط خوش طرح بودن مسائل مقدار مرزی از نظر معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی و ناحیه مورد نظر مسئله که در فیزیک و مهندسی ظاهر می شوند، وسعت دهیم.

واژه‌های کلیدی: چرخه مسائل ریاضی ـ فیزیک، مسائل خوش طرح، مسائل ناخوش طرح و مسائل مقدار مرزی.

---

1 . Well-posed problems
2 . Ill-posed problems

۱. مقدمه

ریاضیات همواره در تجزیه و تحلیل مسائل عملی و پدیده های طبیعی نقش اساسی و تاریخی داشته است. نقش ریاضیات اولیه در شرق باستان (تمدنهای کهن بشری مثل بابل و مصر) و نظریه وحدت فضای فیزیک و فضای ریاضی مربوط به فیلسوفان و ریاضیدانان یونان باستان مثل اقلیدس و افلاطون حکایت از استفاده ریاضیات در حل مسائل عملی و هندسی دارد . همچنین، نقش و توسعه ریاضیات در دوره ایرانی ـ اسلامی و به دنبال آن دوره انتقال [که علوم و ریاضیات دوره یونانی و هندی و چینی که به دست دانشمندان دوره ایرانی ـ اسلامی محفوظ مانده و توسعه و تکامل پیدا کرده بودند، به مغرب زمین را در پی داشت] همه از تأثیر و نقش ریاضیات در شناخت مسائل فیزیکی و پدیده های طبیعی و در نتیجه، احاطه و تسلط بشر بر طبیعت و گسترش علوم طبیعی حکایت دارد. در دوره های معاصر و جدید نیز نه تنها از این نقش چیزی کاسته نشده است، بلکه جهانیان بیشتر از پیش به نقش ریاضیات در تجزیه و تحلیل مسائل فیزیک و پدیده های طبیعی پی برده اند و اعلام سال ۲۰۰۰ به عنوان سال جهانی ریاضیات گویای توجه و رویکرد جهانیان به ریاضیات است.

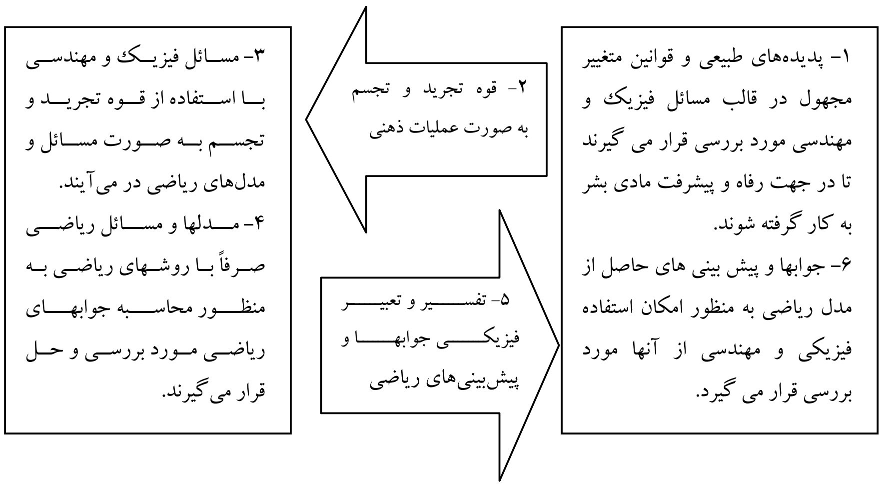
این واقعه نشان می دهد که این شاخه از علوم بشری با داشتن تاریخ ده هزار ساله اش نه تنها کهنه نشده و به بن بست نرسیده است، بلکه تازه می خواهد متولد شود.

در این مقاله ضمن تشریح و تبیین نقش ریاضیات در دوره های معاصر و جدید، به چگونگی ایفای این نقش پرداخته و اصول و مبانی مدلسازی ریاضی در قالب چرخه مربوط به مسائل ریاضی ، فیزیک و مهندسی بررسی و مشکلات موجود و عملی در این چرخه از دیدگاه تاریخ و فلسفه علم مطرح شده است. همچنین، تواناییهای روشهای ریاضی و توسعه آنها برای رفع مشکلات موجود به همراه چند مثال مورد بحث قرار گرفته است.

در نهایت، شرایط مسائل خوش طرح و ناخوش طرح ریاضی ـ فیزیک و مهندسی مطالعه شده است تا از این رهگذر بتوان زمینه های تعامل فیزیک، مهندسی و ریاضیات را گسترش داد. در پایان با طرح این سؤال که فیزیک و مهندسی امروزه از ریاضیات چه می خواهد، جرقهها و انگیزه های این تعامل بیشتر آشکار می شود . امید است این سؤال مورد توجه فیزیکدانان، مهندسان و ریاضیدانان قرار گیرد که مطمئناً هم می تواند عناوین و موضوعات خوب تحقیقی را به بار آورد و هم انگیزه های فیزیکدانان و ریاضیدانان را برای تعامل بیشتر و در نتیجه سرعت بخشیدن به مراحل رشد و تعالی علوم پایه در کشورمان افزایش دهد.

۲. چرخه مربوط به مسائل فیزیک و ریاضی

تعامل و کنش میان مسائل و موضوعات فیزیک (علـوم طبیعـی)، علـوم مهندسـی و مسـائل و موضوعات ریاضی (الگوها و مدلهای ریاضی) را در چرخه زیر در نظر می گیریم [۱]:



نکات زیر در این چرخه قابل توجه است [۷]:

- تمام مسـائل و مجهـولات موجـود در حـوزه علـوم طبیعـی از قبیـل فیزیـک، شـیمی، زیست شناسی، پزشکی و علوم مهندسی که می تواند جنبه کمّی داشته و تغییـر پـذیر باشد، در این مجموعه قرار مـی‌گیـرد. عـلاوه بـر ایـن، مسـائل و موضـوعات بعضـی از شاخه‌های حوزه علوم انسانی مثل جمعیت شناسی، برنامه ریزی و مدیریت بـا مـدلهای آماری و برنامه سازی خطی و غیرخطی و تحقیق در عملیات می تواند در این مجموعـه قرار گیرد که همگی آنها را با عنوان مسائل فیزیکی در نظرمی‌گیریم.
- هر موقع بتوانیم مسئله فیزیکی و مهندسی مورد بحث را روی کاغذ بیاوریم و داده هـا و اطلاعات و شرایط و واقعیتهای حاکم بر نظام فیزیکـی را در قالـب اشـیا و مفـاهیم ریاضی به ویژه به صورت روابط و معادلات ریاضی بنویسیم، اصطلاحاً می‌گوییم که برای آن مسئله فیزیکی مدل و الگوی ریاضی ساخته‌ایـم. مـدل ریاضـی مسـائل فیزیکـی و

مهندسی غالباً به صورت مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی کـه شـامل معـادلات دیفرانسیل به همراه یک یا چند شرط اولیه و مرزی هستند، در می‌آیند.

- ساختن این مدل و میزان انطبـاق و هـم نهشـتی آن بـا سیسـتم ، مسـئله فیزیکـی و مهندسی به میزان آشنایی فرد یا افراد به واقعیتهای نظام فیزیکی و مهندسی و همین طور آشنایی آنها به روشها و نظریه های ریاضی بستگی دارد.
- مرحله دو این چرخه در بین فیزیکدانها به روش فروکاست موسوم است. بدین معنا کـه برای درک پدیده های طبیعی ابتدا آن را به ساده ترین حالت تبدیل می‌کنند (یـا فـرو می‌کاهند) و سپس، برای پدیده ساده شده یک مدل ریاضی همراه با مفاهیمی ساده و برگرفته از طبیعت می سازند[۴].
- از متخصصان تراز اول علوم پایه (علوم طبیعی) و علوم مهندسی گرفتـه تـا اسـتادان، دانشجویان، معلمان و دانش آموزان این رشته ها، همه به نـوعی در مرحلـه یـا مراحـل مشخصی از این چرخه کار می‌کنند و تفاوت آنها، چنان که در قسمت سوم نیز اشـاره شد، در میزان انطباق و پوشش قرار دادن مـدل ریاضـی ارائـه شـده و میـزان نزدیکـی جوابها و پیش بینی های حاصل از الگوی ریاضی با جواب تحقیقـی مسـئله فیزیکـی و مهندسی است.

۳. مشکلات اساسی و عملی در این چرخه

با وجود اینکه این چرخه ساده و ساختار و مراحل آن خیلی روشن به نظر می آید، ولی عمـلاً کار کردن در این چرخه هم مشکلات خیلی اساسی و بزرگی برای دانشمندان بزرگ به دنبال داشته است و هم مشکلات ساده و زیادی می تواند برای کسانی که به نوعی در زمینـه هـای عملی کار می‌کنند در پی داشته باشد که به قرار زیر است:

- آیا اساساً هر مسئله فیزیکی و مهندسی قابل تبدیل به مسئله و الگوی ریاضی است؟
- آیا اساساً هر مسئله ریاضی که از فیزیک و مهندسی حاصل شده، دارای جواب است؟
- آیا هر جواب مسئله ریاضی در فیزیک و مهندسی قابل استفاده است؟

سؤال اول که در مرحله دوم این چرخه پیش می آید، به تجرید پذیری مفاهیم فیزیکـی و مهندسی مربوط است که در مسائل و موضوعات فیزیکی مطرح می‌شود. در پاسخ به این سؤال از نظر تاریخی می توان به عقیده و نظر ریاضـیدانان و فیلسـوفان یونـان باسـتان اشـاره کـرد.

ریاضیدانان و فیلسوفان یونانی مثل اقلیدس و افلاطون به چیزی به نام وحدت فضای فیزیکی و فضای ریاضی اعتقاد داشتند. بر این اساس آنها معتقد بودند که ریاضیات مدل نمادین جهان است و اشیا و مفاهیم ریاضی مستقل از وجود ریاضیدانان و جلوتر از آنان وجود دارند و کار یک ریاضیدان در حقیقت، پرده برداری از این اشیا و ماهیتهای ریاضی است که قبلاً وجود پیدا کرده اند. این دیدگاه در فلسفه ریاضیات به افلاطون گرایی موسوم است. از طرفداران سرسخت و معاصر این فلسفه رینه تام و گورت گودل را می‌توان نام برد. آنجا که تام[۱۹۷۱] می‌گوید:

"در همه چیز از قبل وجود دارد. ریاضیدانان باید به قدر کافی شهامت داشته باشند که تمایلات عمیق خود را بروز دهند و تأیید کنند که صورتهای ریاضی در واقع وجود دارند و این وجود مستقل از ذهنی است که آنها را بررسی و مطالعه می‌کند"[۳].

همین طور که در تاریخ علم و ریاضیات به دوره‌های بعدی مثل دوره ایرانی ـ اسلامی و دوره انتقال می‌رسیم، این دیدگاه تقویت می‌شود که همه مسائل علوم طبیعی و کاربردی را می توان به نوعی با ریاضیات مدل سازی کرد و متناظر با آنها مدلهای ریاضی ساخت. تا اینکه به ریاضیدانان و فیلسوفان معاصر مثل کپلر، گالیله و دکارت می رسیم که معتقد بودند مسائل علوم طبیعی را می توان با ریاضیات بررسی و آنها را حل کرد . تا آنجا که متفکر بزرگ [اواخر دوره قرون وسطی] لئوناردو داوینچی می گفت: « هر کس ریاضیات را موافق مبانی من نیاموخته است، آثار مرا نخواند و ای متعلمان ریاضیات بخوانید و ساختمان بی پی مسازید.» به ویژه نقش ریاضیات در تجزیه و تحلیل مسائل طبیعت را در این گفته گالیله می بینیم: «طبیعت خطه ریاضیات است».

سرانجام، در این نهضت عظیم ریاضی به دکارت می رسیم که به کلی مجذوب ریاضیات شد و رفته رفته همه تعلقات دیگر خود را در پای آن قربانی و ریاضیات را مفتاح معرفت اعلام کرد.

دکارت در پاسخ به سه سؤال مطرح شده و امکان تجریدپذیری مسائل فیزیکی و مهندسی و تأویل آنها به ریاضیات به سه اصل (یا سه قانون) معتقد است که عبارت اند از [۲]:

قانون اول دکارت: هر مسئله فیزیکی از هرگونه که باشد به یک مسئله ریاضی تبدیل می‌شود.

قانون دوم دکارت: هر مسئله ریاضی از هرگونه که باشد به یک مسئله جبری تبدیل می‌شود.

قانون سوم دکارت: هر مسئله جبری از هرگونه که باشد به یک معادله ریاضی تبدیل می شود.

واقعیت این است که پیدا کردن و ارائه مسئله‌ای از علوم طبیعی و علوم مهندسی که نتوان آن را با ریاضیات صورت بندی و مدلسازی کرد، مشکل است و بر این اساس، شاید یکی از اهداف دانشمندان معاصر به ویژه طرفداران مکتب تجربه گرایی[1] و محفل وین این بود که با تأویل علوم فیزیک و شیمی به ریاضیات و زیست شناسی به فیزیک و شیمی و بالاخره، روانشناسی و علوم رفتاری به زیست شناسی، می‌خواستند زنجیره این علوم، به ویژه جنبه های کمی و کیفی آنها، را به نحوی به ریاضیات وابسته کنند تا از این رهگذر بر روشهای حل آنها و نیز میزان درستی و اعتبار آنها بیفزایند. در هر حال، سیر تاریخی و عقاید و آرای دانشمندان دوره های مختلف علم و ریاضیات نشان می دهد که قوانین دکارت می تواند از اعتبار تاریخی و همیشگی برخوردار باشد. به ویژه اینکه امروزه قسمت عمده ای از مسائل و موضوعات تحقیقاتی در زمینه های پزشکی و علوم انسانی مثل جامعه شناسی، روانشناسی، مدیریت و اقتصاد را می توان با مدلهای ریاضی، به خصوص با مدلهای آماری، تجزیه و تحلیل کرد، طوری که اگر نتایج تحقیقات پزشکی و جامعه شناسی با روشهای ریاضی و آماری و برنامه‌ریزی و تحقیق در عملیات مورد تایید قرار نگیرد، از چاپ آن در مجلات معتبر بین المللی خودداری می‌شود.

٤. نحوه مدلسازی ریاضی چند پدیده طبیعی، فیزیکی و مهندسی

مواردی که می توان مطرح کرد و به طور مشترک برای پدیده های افزایشی و کاهشی مثل پدیده رشد جمعیت و قانون رشد سرمایه در بانکها، پدیده تلاشی مواد رادیو اکتیو و ... به کار می رود، به صورت زیر است:

۱. در همه این پدیده ها ما با فرض معقولی که برای متخصصان همه این شاخه ها قابل قبول است، کار مدلسازی ریاضی را شروع می‌کنیم و آن این است که میزان تغییر جمعیت نسبت به زمان متناسب با جمعیت اولیه، میزان رشد سرمایه متناسب با سرمایه اولیه و میزان

1 . Positivism

تلاشی مواد رادیو اکتیو متناسب با مقدار اولیه ماده رادیو اکتیو است. همه اینها به زبان ریاضی با تناسب زیر نوشته می شود:

$$\frac{dy}{dt} \approx y$$

که y قانون مجهول (رشد جمعیت، رشد سرمایه و تلاشی مواد رادیو اکتیو) است. این تناسب را با وارد کردن یک ضریب تناسب به یک تساوی تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

اما این رابطه جدید از دید ریاضی یک معادله دیفرانسیل است که جواب آن با شرایط اولیه مربوط به هر مسئله، ضابطه تغییر را به دست می‌دهد که معمولاً این جوابها به صورت نمایی هستند:

$y(t) = ce^{kt}$, ثابت اختیاری= c

واقعیتهای طبیعی و فیزیکی نیز که بر این مسائل حاکم است، درستی و انطباق این جواب ریاضی را با حقیقت جواب مسئله فیزیکی روشن می‌کند، از قبیل اینکه این جواب با میل دادن متغیر زمان به بی نهایت [بسته به علامت ضریب تناسب k] به بی نهایت یا به صفر میل می‌کند. این نشان می دهد که جمعیت یک جامعه وابسته به نرخ رشد منفی یا مثبت آن، افزایش یا کاهش می یابد و همین طور سرمایه در بانک با گذر زمان افزایش پیدا می‌کند.

مثال دیگر بررسی موضوع شیوع بیماریهای واگیر در پزشکی است. پزشکان عموماً می‌دانند که بیماریهای واگیر بین افراد سالم و بیمار سرایت می‌کند. اما تعیین ضابطه این سرایت به طور دقیق به یک مسئله (معادله دیفرانسیل) ریاضی مربوط می‌شود که باید اول مدلسازی و سپس حل شود.

برای ساختن مدل ریاضی این مسئله ملاحظه می‌کنیم که اگر در یک جامعه n نفری p نفر مبتلا و q نفر سالم باشند، در این صورت با به حد کافی بزرگ گرفتن حجم جامعه نمونه آماری؛ یعنی n و تعیین نسبت افراد سالم و بیمار به صورت $x = \frac{p}{n}$ و $y = \frac{q}{n}$ که

$x+y=1$ و استفاده از این فرض معقول که میزان شیوع بیماری واگیر متناسب با تعداد تماسهای افراد سالم و بیمار است، بنابراین، تناسب ریاضی زیر بیان این واقعیت پزشکی است:

$$\frac{dx}{dt} \approx xy$$

و این تناسب با وارد کردن ضریب تناسب β به یک تساوی ریاضی تبدیل می شود:

$$\frac{dx}{dt} = \beta xy = \beta x(1-x)$$

که این رابطه ریاضی معادله دیفرانسیل مربوط است که جواب آن با شرط اولیه $x(0)=x_0$ عبارت است از:

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-\beta t}}$$

این جواب ضابطه دقیق سرایت این بیماری را نشان می دهد و موضوع جالب توجه این است که اگر متغیر زمان در این جواب به بی نهایت میل کند، آن گاه حد این جواب به یک میل می‌کند و نشان دهنده این است که اگر مسئولان بهداشت جامعه تدابیری برای قرنطینه کردن افراد بیمار اتخاذ نکنند، همه افراد سالم در معرض بیماری قرار می‌گیرند[۸].

موضوع جالب توجه دیگر این است که مدل ریاضی مسئله چگونگی پخش یک شایعه (خبر درست یا نادرست) در جامعه نیز از همین مدل ریاضی تبعیت می‌کند. در واقع، این به دلیل آن است که همانند بیماری که از افراد بیمار به افراد سالم با تماس سرایت می‌کند، پخش شایعه نیز به میزان تماس افراد آگاه و ناآگاه بستگی دارد.

البته، باید توجه کرد که ضریب تناسب در این مسائل در واقع، همان نرخ رشد جمعیت، نرخ رشد سرمایه و در مسئله پزشکی همان نرخ رشد سرایت بیماری است که این نرخ رشد از جامعه به جامعه و از بانک به بانک و از بیماری به بیماری دیگر تفاوت می‌کند که این نرخ رشد در دست متخصصان آن فن است و به صورت ریاضی نیز قابل محاسبه است.

مورد دیگری که در مدلسازی ریاضی خیلی از مسائل فیزیک و مهندسی پیش می آید و به تغییر پدیده ها و حرکت اجسام نسبت به زمان مربوط می شود و به خصوص پدیده هایی که ماهیت موجی و ارتعاشی دارند، بر مبنای قانون حرکت نیوتن $F=m\gamma$ است. این فرمول کلاسیک، مبنای ریاضی و فیزیکی خیلی از معادلات دیفرانسیل عادی و پاره ای است که به

عنوان مدل ریاضی پدیده هایی مثل ارتعاش امواج در ابعاد مختلف (موج یک بعدی ، مـوج دو بعدی و سه بعـدی)، ارتعـاش فنـر و محاسـبه تـاب تیرهـا، بـه خصـوص در پدیـده‌هـایی مثـل زلزله نگاری، آب شناسی، هواشناسی، فیزیک و مهندسی پزشکی ظاهر می شوند:

معادله موج یک بعدی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \qquad \text{c} = \text{ثابت فیزیکی}$$

معادله موج دو بعدی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

تابع مجهول $u(x,t)$ و $u(x,y,t)$ نشان دهنده مسیر حرکت موج به ترتیب در حالت یـک بعدی و دو بعدی نسبت به زمان است که از حل معـادلات دیفرانسـیل یـاد شـده بـا در نظـر گرفتن شرایط اولیه و شرایط مرزی مسئله به دست می آید.

برای به دست آوردن این معادله ها براساس فرمول نیوتن ابتدا برایند نیروهای وارد بر یک المان (طول یا مساحت یا حجم) را مشخص می کنیم و سپس، با توجـه بـه مفهـوم فیزیکـی شتاب و نمایش ریاضی آن $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma$ ، مشتق دوم مسیر نسبت به زمان در معادله ظاهر می‌شود. همچنین، مشتقات مرتبه دوم u نسبت به مکـان ناشـی از محاسـبه براینـد نیروهـا در المـان مربوط در طرف راست معادله ظاهر می شود[۶].

۵. توسعه روشهای ریاضی

پاسخ به سؤال دوم سبب شده است که ریاضیدانان در کنـار روشـها و اصـول حـل مسـائل و معادلات ریاضی همواره به نظریه وجود جواب و یگانگی جواب این نوع مسائل و معـادلات نیـز بپردازند. در واقع، چنـان کـه مـی دانـیم، همـواره دو نگـاه و دو عملکـرد مـوازی و جداگانـه

ریاضیدانان در باره مسائل و معادلات ریاضی به خصوص در دوره جدید علم [ریاضیات] وجود داشته است:

- انجام دادن کار تحلیلی و نظری در خصوص بود و نبود جواب مسائل ریاضی؛
- انجام دادن کار تکنیکی و محاسبه ای برای محاسبه جواب‌های مسائل ریاضی.

در بخش بعدی خواهیم دید که بررسی وجود جواب مسائل ریاضی از اهمیت اساسی برخوردار است و در واقع، اگر بدون بررسی نظری وجود حل مسائل ریاضی و عدم اطمینان از وجود حل مسائل یاد شده، به محاسبه جوابهای مسائل ریاضی اقدام کنیم، کاری تقریباً غیر علمی انجام می دهیم، زیرا ممکن است مسئله ریاضی دارای جواب نباشد، ولی با این حال ممکن است یک شخص دنبال محاسبه جواب باشد و ساعتها نیز برای رسیدن به جواب با کامپیوتر وقت بگذارد.

هرگاه با طی فرایند یاد شده از وجود جواب مسائل ریاضی اطمینان حاصل شد، در این صورت این جواب ها معمولاً به دو طریق محاسبه می شوند:

۱. روشهای تحلیلی؛ ۲. روشهای عددی و تقریبی.

روشهای تحلیلی معمولاً برای حل مسائل و معادلات و دستگاههای خطی به کار می‌رود، در حالی که جواب معادلات و مسائل و دستگاههای غیر خطی را عموماً نمی‌توان با روشهای تحلیلی جستجو کرد و برای این گونه مسائل ریاضی، روشهای حل معمولاً به صورت عددی و تقریبی توسط کامپیوترها انجام می شود.

از طرف دیگر، مدلهای ریاضی بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی و پدیده‌های طبیعی متأسفانه، به صورت معادلات و مسائل غیر خطی در می آیند و روشهای نظری و تحلیلی در خصوص بود و نبود جواب معادلات غیر خطی و همین طور روشهای حل و محاسبه جوابهای این نوع معادلات عموماً مشکل و از نظریه های پیچیده و دشوار ریاضیات هستند. این موضوع سبب می شود که نظریه تقریب در ریاضیات برای حل مسائل غیر ـ خطی به کار گرفته شود و به دنبال آن مباحث آنالیز عددی و محاسبات عددی در رشته های علوم و مهندسی شکل گیرد، به ویژه آنکه تجزیه و تحلیل خطای روشهای عددی اهمیت خاصی می یابد.

بررسی سؤال سوم در این چرخه خیلی اساسی و مهم است. پاسخ منفی به این سؤال خیلی آسان و ساده است و این به دلیل آن است که جوابها و پیش بینی‌های حاصل از مسائل ریاضی هر چند که خیلی دقیق و درست هستند، اما بیشتر وقتها این جوابها عملی و سودمند نیستند.

این مطلب را می توان با طرح مثالی ساده بیان کرد. اگر اتاقی را یک بنا با دو کارگر در دو روز نقاشی کنند، حساب کنید ۱۰۰ بنا با ۲۰۰ کارگر این اتاق را در چند ساعت و چند روز نقاشی می‌کنند. الگوی ریاضی این مسئله فیزیکی در قالب یک تناسب خیلی زود جواب را به دست می دهد، اما پر واضح است که این جواب ریاضی از نظر فیزیکی به هیچ وجه عملی نیست.

برای اینکه جوابهای مسائل ریاضی برگرفته از مسائل فیزیکی و مهندسی امکان عمل و کاربرد فیزیکی داشته باشند، ریاضیدانان و فیزیکدانان برای جلوگیری از به هدر رفتن تلاششان مسائل خوش طرح ریاضی ـ فیزیک را عنوان کرده اند که در ادامه ویژگیهای آنها بیان می شود.

۶. مسائل خوش طرح[1]

بر اساس تعریفی که برای مسائل خوش طرح ریاضی ـ فیزیک و مهندسی ارائه شده است، این مسائل از سه ویژگی اساسی زیر برخوردارند هستند:

- مسئله باید جواب داشته باشد؛
- جواب مسئله باید یگانه باشد،
- جواب مسئله نسبت به داده های مسئله به طور پیوسته تغییر کند.

هر سه شرط در واقع، از التزام فیزیکی برخوردار هستند. شرط اول ایجاب می‌کند که ما در ساختن مدلهای ریاضی مسائل فیزیکی و مهندسی الزاما به امکان وجود جواب مسئله ریاضی متناظر نیز بیندشیم، زیرا اگر هدف فقط ساختن مدلهای ریاضی این مسائل بود، وجود جواب ریاضی خیلی مهم نبود، ولی با توجه به مراحل بعدی چرخه (سیکل) مسائل فیزیک ـ ریاضی، باید در مرحله ششم از این جواب در فیزیک و مهندسی استفاده کنیم. لذا، این شرط ایجاب می‌کند که در ساختن مدل ریاضی واقعیتهای حاکم بر مسئله فیزیکی نباید آنچنان به طور جامع در نظر گرفته شوند تا در نتیجه، مدل ریاضی خیلی مرکب و پیچیده باشد که در وجود و محاسبه حل آن نتوانیم کاری کنیم. بر این اساس، فیزیکدانان و مهندسان پدیده ها را در شرایط ایزوله و آزمایشگاهی بررسی می‌کنند. برای مثال، در بررسی مسئله نوسانگر هارمونیک

1 . Well-posed Problems

فرض را بر این می‌گیریم که پاندول تحت زاویه های کوچک نوسان می‌کند تا به جای یک معادله دیفرانسیل غیر خطی لاینحل یک معادله دیفرانسیل ساده خطی قابل حل به دست آید.

توجه می‌کنیم که معادله دیفرانسیل نوسانگر هارمونیک در اصل به صورت زیر است:

$$\ddot{x}+\sin x=0$$

ولی برای اینکه معادله دیفرانسیل ساده تری داشته باشیم فرض می‌کنیم که پاندول تحت زاویه کوچکی نوسان می‌کند و این سبب می شود در صورت معادلـه از هـم ارزی $\sin x \approx x$ استفاده کنیم و بدین سان یک معادله ساده خطی به صورت: $\ddot{x}+x=0$ به دست می آید که به راحتی قابل حل است.

شرط دوم نیز نتیجه التزام فیزیکی روی مسائل یاد شده است. چه اینکه اگر جواب مسائل ریاضی یگانه نباشد، در فیزیک و مهندسی از میان راه حلهای بی شمار، از کدام یک استفاده شود. در حالی که با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی و واقعیتهای حاکم بر مسئله فیزیکی، فقط یک جواب خواهد بود که در شرایط مورد نظر صدق می‌کند.

اما شرط سوم خیلی اساسی است و در واقع، همین ویژگی است که سبب می شود جوابها و پیش بینی های حاصل از الگوی ریاضی در مسئله فیزیکی نیز عملاً مورد استفاده قرار گیرد و جوابهای مسائل ریاضی که این خاصیت را نداشته باشند، نمی توانند در فیزیک و مهندسی مفید باشند. برای توضیح این ویژگی یک یادآوری مختصر از خطاهای اجتناب ناپذیر می تواند نقش این ویژگی را بیشتر نمایان سازد.

همه می دانیم که عموماً مسائل فیزیکی و مهندسی با اندازه گیری و محاسبه سر و کار دارند و در اندازه گیریها و محاسبات معمولاً دچار خطاهای اجتناب ناپذیر می‌شویم که به چند مورد اساسی از آنها اشاره می کنیم:

- خطای دستگاههای اندازه‌گیری
- خطای قطع روند نامتناهی در محاسبات
- خطای حاصل از عملیات ریاضی روی داده ها
- خطای حاصل از لزوم ساده سازی مدل

ما نمی توانیم این نوع خطاها را در محاسبات به کلی از بین ببریم، بلکه می توانیم مقدار آنها را حتی الامکان کاهش دهیم یا تأثیر آنها را روی جواب نهایی نادیده بگیریم. زمانی این تأثیر قابل اغماض خواهد بود که جواب مسئله ریاضی حایز شرط سوم باشد.

در واقع، وقتی جواب نسبت به داده ها به طور پیوسته تغییر می‌کند، تأثیر تغییرات جزئی روی متغیر [که ناشی از خطاهای اجتناب ناپذیر است]روی تابع و جواب نیز جزئی خواهد بود؛ به خاطر بیاورید که مفهوم پیوستگی یک تابع نسبت به متغیرش می تواند با این بیان نیز گفته شود: که وقتی متغیر مستقل، به صورت جزئی تغییر می‌کند، متغیر تابع نیز به تبع متغیر مستقل تغییر جزئی پیدا کند.

اگر جواب مسائل ریاضی حایز شرط سوم نباشد، معنی آن این است که جواب نسبت به تغییرات جزئی متغیر پایدار نیست؛ به عبارت ساده تر، تأثیر خطاهای اجتناب ناپذیر نه تنها قابل اغماض نخواهد بود، بلکه تأثیر این تغییرات جزئی بر جواب، می تواند خیلی کلی و ویرانگر باشد و جواب حاصل از الگوی ریاضی هیچ انطباق و هم نهشتی ای با مسئله فیزیکی مهندسی اولیه نخواهد داشت.

البته، باید توجه کرد که این سه ویژگی برای آن دسته از مسائل ریاضی است که انگیزه و خواستگاه فیزیکی داشته‌اند. طبیعی است مسائل ریاضی‌ای که در خود ریاضیات [بدون هرگونه انگیزه فیزیکی] و در ذهن ریاضیدانان ایجاد می شوند، می توانند مسائل مهمی باشند، هرچند که جواب نداشته باشند یا جواب آنها یگانه نباشد. به ویژه آنکه جواب این گونه مسائل حایز شرط سوم نباشد، مانند مسائل ترسیمی یونان باستان (تثلیث زاویه، تضعیف مکتب و تربیع دایره) که در تاریخ ریاضیات نزدیک به دو هزار سال تلاش ریاضیدانان را به خود جلب کرده‌اند، بدون آنکه جواب و حل داشته باشند. این قبیل مسائل می توانند در ریاضیات موضوعات و مباحث جدید بیافرینند که بعدها در فیزیک و مهندسی کاربرد داشته باشند.

چنانچه می‌دانیم، بحث منحنیهای عالی از بررسی مسائل یاد شده شکل گرفت یا می‌توان به معادله تریکومی اشاره کرد که در ابتدا هیچ انگیزه و کاربرد فیزیکی نداشت و بعدها معلوم شد که معادله تریکومی که هم از ماهیت بیضوی و هم از ماهیت هذلولی برخوردار است، در توصیف و تجزیه و تحلیل حرکت مایعات و به ویژه در صنعت پرواز هواپیماها مورد استفاده قرار گرفت. معادله حرکت هواپیما تا رسیدن به سرعت صوت بیضوی و بعد از آن ماهیت هذلولی دارد.

مثال مهم دیگری که می‌توان به آن اشاره کرد، هندسه بیضوی است که ریمان آن را به عنوان نظریه‌ای صرفاً ریاضی ابداع کرد، بدون آنکه امکان و مورد مشخصی برای کاربرد عملی آن مد نظر داشته باشد. مدتها بعد، وقتی آینشتاین در جستجوی نظریه ریاضی مناسبی برای بررسی ساختار فیزیکی عالم می‌گشت، در نظام مجرد ریمان ابزار تصوری یا دستگاه مفهومی مورد نیاز خود را پیدا کرد. چنان که می‌دانیم، ساختار هندسی که فیزیک نسبیتی به فضای فیزیکی عالم نسبت می‌دهد، مشابه سطح کره است که انحنای آن نقطه به نقطه تغییر می‌کند. در عالم فیزیکی ما، انحنای فضا در نقطه ای معین توسط توزیع جرم در همسایگی آن تعیین می شود در نزدیکی جرمهای بزرگی چون خورشید فضا به شدت خمیده است و در بقیه نقاط با چگالی کم ساختار عالم تقریباً اقلیدسی است[۵].

۷. مسائل ناخوش طرح

از طرفی، ریاضیدانان مسائل ناخوش طرح[1] را مطالعه می‌کنند تا حریم و حوزه مسائل خوش طرح بیشتر مشخص شود. یک مسئله از جهات مختلف می تواند ناخوش طرح باشد. در مسائل مقدار مرزی و مقدار اولیه، مسئله می‌تواند از نظر معادله دیفرانسیل و همین طور از نظر ناحیه‌ای که جواب مسئله در آنجا جستجو می شود و به ویژه از نظر شرایط مرزی و شرایط اولیه داده شده، ناخوش طرح باشد.

هانری لبگ (۱۹۲۴) ناخوش طرح بودن مسائل مقدار مرزی را از نظر ناحیه مربوط بررسی کرد و با طرح ناحیه های سیب وار نشان داد که این مسائل می توانند ناخوش طرح باشند. هانس لوی (۱۹۵۷) ناخوش طرح بودن این مسائل را از نظر معادله دیفرانسیل مربوط بررسی کرد و با طرح یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی که همه ضرایب آن و طرف راست آن تابعهای تحلیلی بودند، نشان داد که این مسئله نمی‌تواند دارای حتی جواب موضعی باشد. در چند مقاله، ما خوش طرح بودن این مسائل را از جهت شرایط مرزی بررسی کرده ایم و با معرفی شرایط ضرروی در هر مساله نشان داده ایم که چه مسائلی می توانند ناخوش طرح باشند[۱۲،۱۳و۱۴].

1 . Ill- posed Problems

۸. نتایج و پیشنهادها

- از مباحث یاد شده و از نحوه ارتباط و تعامل دو مجموعه (مجموعه مسائل فیزیکی و مجموعه مسائل ریاضی) چنین بر می آید که همواره این تعامل در طول تاریخ علوم طبیعی بوده است و گاهی اوقات مسائل فیزیکی و مهندسی سبب شده اند تا که ریاضیدانان مباحث جدید به ویژه به صورت نظری در ریاضیات ابداع کنند تا از نتایج آنها بتوان مسائل فیزیکی را با قدرت بیشتری تجزیه و تحلیل کرد. گاه نیز ریاضیات بی‌خبر از موضوعات فیزیک به راه رشد و تعالی و تکامل موضوعات و شاخه های خود ادامه داده است و بعد از مدتی فیزیکدانان و مهندسان متوجه شده اند که از مباحث نظری ریاضیات می توانند برای حل مسائل عملی خود استفاده کنند؛ آنچه مهم است، اطلاع ریاضیدانان از مشکلات نظری فیزیکدانان و مهندسان و کلاً کسانی است که در حوزه‌ها و مسائل عملی کار می‌کنند و همین طور اطلاع فیزیکدانان از مباحث و روشهای ریاضی است که می‌تواند به آنها کمک کند.

  این سؤال نباید خیلی مبالغه آمیز باشد که فیزیک امروزه از ریاضیات چه می خواهد؟ ریاضیدانان روی مسائل و موضوعاتی کار می‌کنند که سبب می‌شود ریاضیات هر چه بیشتر در خدمت فیزیک و مهندسی باشد و هم اینکه سبب می‌شود تا ریاضیات و ریاضیدانان از این تعامل و چرخه (سیکل) زیاد دور نشوند. در واقع، هر قدر این دو مجموعه انطباق و فصل مشترک زیادی با هم داشته باشند، رونق ریاضیات بیشتر و متعاقب آن سبب کاربردی بودن آن خواهد شد و در صورت خلاف این؛ یعنی جدایی این دو مجموعه، ریاضیات و گروههای ریاضی در دانشگاهها بیشتر به فلسفه و گروههای فلسفه نزدیک خواهند شد.

  در گذشته، دانشکده های ریاضی و فیزیک در دانشگاهها جدا نبودند و احتمالاً در بعضی از کشورهای پیشرفته صنعتی هنوز هم شاهد فعالیتهای دپارتمانهای مشترک ریاضی فیزیک و مکانیک تحلیلی هستیم.

- از طرف دیگر، همایشهای علمی در کشور هم در ریاضیات و هم در فیزیک و علوم مهندسی به طور جدا و بی خبر از مسائل و نتایج تحقیقات یکدیگر برگزار می شوند. به نظر می رسد که اگر در کنار تأسیس دپارتمانهای مشترک ریاضی ـ فیزیک و ... بتوان

همایشهای مشترک در همه علوم به ویژه در ریاضیات و فیزیک و همین طور در ریاضیات و علوم مهندسی، ریاضیات و علوم اقتصادی، ریاضیات و علوم زیستی، ریاضیات و علوم کامپیوتر و همین طور همایشهای مهندسی و پزشکی، شیمی و محیط زیست و ... برگزار کرد، در این صورت می‌توان زمینه‌های تعامل و تلاقی همه علوم را با یکدیگر شناسایی و به دنبال آن علوم را به طور کلی و به ویژه ریاضیات را کاربردی‌تر کرد.

- از طرف دیگر، آنچه مهندسان را از معماران تجربی و از کسانی که در زمینه‌های فنی ـ مهندسی اطلاعاتی به طور تجربی کسب کرده‌اند متمایز می‌کند، آشنایی مهندسان با مبانی نظری و علمی و محاسبات ریاضی رشته ایشان است. بنابراین، اگر یک مهندس با مبانی علمی و ریاضی روشها آشنا نباشد و به خصوص نتواند کار مدلسازی ریاضی را که هم به توانایی علمی و ریاضی و هم به تصورات و تجسمهای فیزیکی و قدرت ریسک مهندسی بستگی دارد به نحو احسن انجام دهد، یقیناً نخواهد توانست در کار مهندسی خود موفق باشد. بر این اساس، پیشنهاد می شود در سر فصلهای دروس رشته های فنی و مهندسی درسی به نام آشنایی با مبانی و اصول روشهای مدلسازی ریاضی گنجانده شود[۷و۱۱].

- در راستای پیشنهاد سوم، اول باید سعی شود که موضوعات پایان نامه های کارشناسی ارشد در رشته های فنی و مهندسی از مسائل ساده تر و بومی انتخاب شود و رفته رفته از نظر مدلسازی ریاضی این موضوعات پیچیده و پیشرفته تر شود. واقعیت این است که ما استادان و متخصصان دانشگاهی و همین طور دانشجویان و فارغ التحصیلان رشته‌های فیزیک و مهندسی تئوری سازان و تئوری کاران توانا و زبر دستی هستیم، ولی در کار مدلسازی و شبیه سازی مسائل عملی و مهندسی خودمان ضعیف و به کار مدلسازی پدیده های طبیعی و مشکلات و مسائل برخاسته از طبیعت و جامعه فنی و مهندسی خودمان کم توجه و بی علاقه‌ایم. دوست داریم مسائل و معادلات سخت و پیچیده را از نظر ریاضی و نظری بررسی و حل کنیم، اما به نحوه و چگونگی ظاهر شدن معادلات ریاضی از روی مسائل فیزیکی و مهندسی اهمیت نمی‌دهیم. اینجاست که باید کار

مدلسازی ریاضی را جدی بگیریم و از مدلهای ساده و بومی خودمان شروع کنیم و آنها را در دامن جامعه علمی و بومی خودمان پرورش دهیم تا به نتایج عالی برسیم [۹و۱۰].

مراجع

۱. اتوس بسلر ، جورج، **آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی**، ترجمه جواد همدانی، انتشارات مرکز دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۲. آرثربرت، ادوین، **مبانی مابعدالطبیعی علوم نوین**، ترجمه دکتر عبدالکریم سروش، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۶۹.

۳. بیژن زاده، **محمد حسین، آشنایی با فلسفه ریاضیات**، انتشارات دانشگاه پیام نور، ۱۳۷۳.

۴. منصوری، رضا، **فیزیک بی فیزیک**، مصاحبه علمی خاطره حجازی، انجمن فیزیک ایران، ۱۳۸۰.

۵. اعتماد، شاپور، **دیدگاهها و برهانها**، نشر مرکز، ۱۳۷۵.

۶. تاین مینت و ردنبات، **معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی و کاربردهای آنها در علوم و مهندسی**، ترجمه محمد جهانشاهی، انتشارات دانشگاه تربیت معلم آذربایجان، ۱۳۷۴.

۷. جهانشاهی، محمد، **اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش دانشگاهی**، انتشارات مدرسه،۱۳۷۷.

۸. بویس، ویلیام و ریچارد دیپریما، **مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی**، ترجمه محمدرضا سلطانپور و بیژن شمس، مرکز نشر دانشگاهی،چاپ پنجم، ۱۳۷۴.

۹. جهانشاهی، محمد، گزارشی از نحوه آموزش و پژوهش در دانشگاههای کشور ژاپن، روزنامه همشهری،۳ اسفند ۱۳۷۸.

۱۰. نقی زاده، محمد، "جایگاه آموزشهای زیست محیطی در آموزش رشته های مهندسی"، **فصلنامه آموزش مهندسی ایران**، سال ششم، شماره ۲۳، پاییز ۱۳۸۳.

۱۱. حجازی، جلال و محمد مهدی غفاری، "اصول اساسی سیستم آموزش مهندسی"، **فصلنامه آموزش مهندسی ایران**، سال هفتم، شماره ۲۸، زمستان۱۳۸۴.

12. Aliev, N., & M. Jahanshahi, "Solution of Poission Equation with Global, Local & non-local Boundary Conditions", **INT. J. Math. Educ**. Sci. Technol, Vol, 33, No. 2, P. 241-247, 2002.

13. Jahanshahi, M. & N., alive, Determining of an Analytic Function on its Analytic Domain by Cauchy-Riemann Equation with Special Kind of Boundary Conditions, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol. 28, P. 33-39, 2004.
14. Jahanshahi, M. Solution of Cauchy – Riemann Equation in the First Quarter with Non – local Boundary Conditions, Abstracts of 6 Seminar on Differentioal Equations & Dynamical Systems, Zanjan, IRAN,2004, 1383.

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۱/۱۰/ ۱۳۸۶)
(تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۷/۲/۳)